第一章课后习题

1、求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

2、求$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2x\right)$

3、求$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+2\sin x)^x-1}{x^2}$

4、求$\lim\limits_{x\to0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

5、已知极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k、c 为常数且 $c\neq0$，求 k、c

6、求$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

7、求$\lim\limits_{x\to0}\frac{xe^x-\sin x}{(1+x)^x-1}$

8、求$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

9、求$\lim\limits_{x\to1}\ln x\cdot\ln|1-x|$

10、设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a

11、求$\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$

12、求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^x$

13、求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x$

14、若$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，求 k

15、当 $x\to1$ 时，函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A)等于 2　　(B)等于 0　　(C)为∞　　(D)不存在但不为∞

16、已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求常数 a

17、当 $x\to0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$　　(B)$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$　　(C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　(D)$1-\cos\sqrt{x}$

18、当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，求 a、b

19、设$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A$(其中 $a>0$ 且 $a\neq1$)，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}$

20、若$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$

21、当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$

(A)有且仅有水平渐近线　　　　　　　　(B)有且仅有竖直渐近线

(C)既有水平渐近线，也有竖直渐近线　(D)既无水平渐近线，也无竖直渐近线

22、曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A)没有渐近线　　　　　(B)仅有水平渐近线

(C)仅有竖直渐近线　　　(D)既有水平渐近线又有竖直渐近线

23、求曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$的斜渐近线方程

24、曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为

(A)0　　　　(B)1　　　　(C)2　　　　(D)3

25、曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线的条数为

(A)0　　　　(B)1　　　　(C)2　　　　(D)3

26、设函数 f(x)在闭区间[0,1]上连续，对于[0,1]上的每一个 x，函数 f(x)的值都在(0,1)内，证明：在(0,1)内存在 α 使 f(α)=α

27、已知函数 f(x)在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 f(0)=0，f(1)=1

证明：存在 α∈(0,1)，使得 f(α)=1−α

28、设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 f(x)的间断点，结论为

(A)不存在间断点　　(B)存在间断点 x=1　　(C)存在间断点 x=0　　(D)存在间断点 x=−1

参考答案

1、求$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)$

解：$\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left[\frac{x^2+x+1}{(x-1)(x^2+x+1)}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right]$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}$

$=\frac{1+2}{1+1+1}=1$

2、求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\cot^2 x\right)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\tan^2 x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x-x^2}{x^2\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^2\tan^2 x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x+x)(\tan x-x)}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x+x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x^3}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^3}$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{x}{x}+1\right)\cdot\frac{1}{3}$$

$$=(1+1)\times\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

3、求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^x-1}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+2\sin x)^x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x\ln(1+2\sin x)}-1}{x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+2\sin x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=2$$

4、求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^3 x}{6}\cdot\sin x}{x^4}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^4 x}{6}}{x^4}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}}{x^4}=\frac{1}{6}$$

5、已知极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 k、c 为常数且 c≠0，求 k、c

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^k}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{x^3}{3}}{x^k}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^k}$

要是 k 大于 3，那么该极限为∞；要是 k 小于 3，那么该极限为 0，

$\therefore k=3$

$c=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3}{x^3}=\frac{1}{3}$

6、求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\ln(\cos x)]'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}\cdot\frac{\sin x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

$=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x}=-\frac{1}{2}$

7、求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{(1+x)^x-1}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{(1+x)^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{e^{x\ln(1+x)}-1}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{x\ln(1+x)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(xe^x-\sin x)'}{(x^2)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-\cos x}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x+xe^x-\cos x)'}{(2x)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^x+xe^x+\sin x}{2}$

$=\frac{1+1+0+0}{2}=1$

8、求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{1-\sqrt{1-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{-\left\{[1+(-x^2)]^{\frac{1}{2}}-1\right\}}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{-\frac{1}{2}(-x^2)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\sin x-1}{\frac{1}{2}x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(e^x-\sin x-1)'}{\left(\frac{1}{2}x^2\right)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-\cos x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-\cos x)'}{(x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+\sin x}{1}$$

$$=\frac{1+0}{1}=1$$

9、求$\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln|1-x|$

解：$\lim\limits_{x\to 1}\ln x\cdot\ln|1-x|=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln|1-x|}{\frac{1}{\ln x}}$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln|1-x|}{\frac{1}{\ln[1+(x-1)]}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\ln|1-x|}{\frac{1}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\ln|1-x|)'}{\left(\frac{1}{x-1}\right)'}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-1}{1-x}}{\frac{-1}{(x-1)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 1}(1-x)$$

$$=1-1=0$$

10、设$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，求 a

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln\left(\frac{x+2a}{x-a}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{x+2a}{x-a}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{3a}{x-a}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{x\cdot\frac{3a}{x-a}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{3ax}{x-a}}$$

$$=e^{3a}=8$$

$\therefore 3a=\ln 8=\ln 2^3=3\ln 2$

$\therefore a=\ln 2$

11、求$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\left[1+\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\left[1+\frac{\ln(1+x)-x}{x}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{e^{x}-1}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\cdot\frac{\ln(1+x)-x}{x}}$$

$$=\lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\ln(1+x)-x]'}{(x^2)'}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{-x}{1+x}}{2x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{2(1+x)}}=e^{-\frac{1}{2}}$$

12、求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)}$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left[1+\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$$

令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x\to\infty \Rightarrow t\to 0$

原极限$=e^{\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\sin\frac{2}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)}$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin 2t+\cos t-1}{t}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{(\sin 2t+\cos t-1)'}{(t)'}}$$

$$=e^{\lim\limits_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{1}}$$

$$=e^{\frac{2\times 1-0}{1}}=e^{2}$$

13、求$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}$

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^{x}=\lim\limits_{x\to\infty} e^{x\ln\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]}$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left[1+\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x\ln\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{x^2+(b-a)x-ab}\right]}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{x\frac{(a-b)x+ab}{x^2+(b-a)x-ab}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{\frac{(a-b)x^2+abx}{x^2+(b-a)x-ab}}$$

$$=\lim_{x\to\infty} e^{a-b}=e^{a-b}$$

14、若$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=e$，求 k

解：$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)^{\frac{1}{\sin kx}}=\lim\limits_{x\to0} e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\left(\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right)}$

$$=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\left(1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{\sin kx}\ln\left(1+\frac{-2\tan x}{1+\tan x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to0} e^{\frac{1}{\sin kx}\cdot\frac{-2\tan x}{1+\tan x}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2}{1+\tan x}\cdot\frac{\tan x}{\sin kx}}$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{-2}{1+\tan x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin kx}}$$

$$=e^{-2\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan x}{\sin kx}}$$

$$=e^{-2\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{kx}}$$

$$=e^{-2\cdot\frac{1}{k}}=e^{-\frac{2}{k}}=e$$

$\therefore -\frac{2}{k}=1$，$\therefore k=-2$

15、当 $x\to1$ 时，函数$\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$的极限

(A)等于 2　　(B)等于 0　　(C)为∞　　(D)不存在但不为∞

解：$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$

$$=\lim_{x\to1^-}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$=2e^{\frac{1}{0^-}}$$

$$=2e^{-\infty}$$

$$=2\times0=0$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$=\lim_{x\to1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}$$

$$=2e^{\frac{1}{0^+}}$$

$=2e^{+\infty}=+\infty$

$\because \lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}} \neq \lim\limits_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$且$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}=0$,

$\therefore$该极限不存在但不为∞，选(D)

16、已知当 $x\to0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，求常数 a

解：$a(x)=(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$

$b(x)=\cos x-1$

$a(x)$是 $b(x)$的等价无穷小，则$\lim\limits_{x\to0}\frac{a(x)}{b(x)}=1$

即$\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{3}ax^2}{-\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}-\frac{2a}{3}=-\frac{2a}{3}=1$

$\therefore a=-\frac{3}{2}$

17、当 $x\to0^+$时，与$\sqrt{x}$等价的无穷小量是

(A)$1-e^{\sqrt{x}}$ (B)$\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$ (C)$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ (D)$1-\cos\sqrt{x}$

解：(B)选项$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\ln\left(1+\frac{\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}}{\frac{\sqrt{x}+x}{1-\sqrt{x}}}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}+x}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$=\frac{1-0}{1+0}=1$

$\therefore\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$与$\sqrt{x}$是等价无穷小，选(B)

其他选项：$1-e^{\sqrt{x}}$与$-\sqrt{x}$是等价无穷小

$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ 与$\frac{1}{2}\sqrt{x}$是等价无穷小

$1-\cos\sqrt{x}$与$\frac{1}{2}x$ 是等价无穷小

18、当 $x\to0$ 时，$f(x)=x-\sin ax$ 与 $g(x)=x^2\ln(1-bx)$是等价无穷小，求 a、b

解：f(x)与 g(x)是等价无穷小，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

即$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\ln(1-bx)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{x^2\cdot(-bx)}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\sin ax}{-bx^3}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-\sin ax)'}{(-bx^3)'}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=1$

若 a≠1，则$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=\infty$，与题目条件冲突，∴a=1

当 a=1 时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-a\cos ax}{-3bx^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{-3bx^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{-3bx^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}-\frac{1}{6b}$

$=-\frac{1}{6b}=1$

$\therefore b=-\frac{1}{6}$

19、设$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=A$(其中 a＞0 且 a≠1)，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\sin x}\right]}{a^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x\ln a}=A$

$\Rightarrow\frac{\frac{f(x)}{\sin x}}{x\ln a}=A+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$

$\Rightarrow f(x)=(A+\alpha)x\sin x\ln a$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(A+\alpha)x\sin x\ln a}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(A+\alpha)x^2\ln a}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{Ax^2\ln a}{x^2}=A\ln a$

20、若$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，求$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}$

解：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0\Rightarrow\frac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0+\alpha$，其中$\lim\limits_{x\to 0}\alpha=0$

$\Rightarrow\sin 6x+xf(x)=\alpha x^3$

$\Rightarrow f(x)=\alpha x^2-\frac{\sin 6x}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+f(x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{6+\alpha x^2-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\alpha+\lim\limits_{x\to 0}\frac{6-\frac{\sin 6x}{x}}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\alpha+\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin 6x}{x^3}$

$=0+\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{(6x)^3}{6}}{x^3}$

$=0+36=36$

21、当 $x>0$ 时，曲线 $y=x\sin\frac{1}{x}$

(A)有且仅有水平渐近线　　　　(B)有且仅有竖直渐近线

(C)既有水平渐近线，也有竖直渐近线　(D)既无水平渐近线，也无竖直渐近线

解：a.水平渐近线　$\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

∴$y=1$ 为该函数曲线的水平渐近线

b.竖直渐近线　不存在使 $x\sin\frac{1}{x}\to\infty$的 x 值

∴该函数曲线没有竖直渐近线

c.斜渐近线　$x\to+\infty$方向已有水平渐近线，就不会再有斜渐近线了

∴该函数曲线没有斜渐近线

综上，该函数曲线有且仅有水平渐近线，选(A)

22、曲线 $y=\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$

(A)没有渐近线　　(B)仅有水平渐近线

(C)仅有竖直渐近线　(D)既有水平渐近线又有竖直渐近线

解：a.水平渐近线　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\frac{1+e^{-\infty}}{1-e^{-\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$

∴$y=1$ 为该函数曲线的水平渐近线

b.竖直渐近线　$\lim\limits_{x\to0}\frac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+e^{0}}{1-e^{0}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{1+1}{1-1}=\infty$

∴$x=0$ 为该函数曲线的竖直渐近线

综上，该函数曲线既有水平渐近线又有竖直渐近线，选(D)

23、求曲线 $y=\frac{x^2}{2x+1}$的斜渐近线方程

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{2x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2x+1}=\frac{1}{2}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x+1}-\frac{1}{2}x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-x(2x+1)}{2(2x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-x}{4x+2}=-\frac{1}{4}$

$\therefore f(x)=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}$为斜渐近线方程

24、曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)$渐近线的条数为

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

解：a.水平渐近线 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{-\infty}+\ln(1+e^{-\infty})\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}[0+\ln(1+0)]=0$

$\therefore y=0$ 为该函数曲线的水平渐近线

b.竖直渐近线 $\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)\right]=\lim\limits_{x\to0}\left[\frac{1}{0}+\ln(1+e^0)\right]=\infty$

$\therefore x=0$ 为该函数曲线的竖直渐近线

c.斜渐近线 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(1+e^x)}{x}\right]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(1+e^x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln e^x}{x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+e^x)-1\cdot x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(1+e^x)-x]$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln e^x-x)$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-x)=0$

$\therefore y=x$ 是该函数曲线的斜渐近线

综上，该函数曲线有 3 条渐近线，选(D)

25、曲线 $y=\frac{x^2+x}{x^2-1}$的渐近线的条数为

(A)0 (B)1 (C)2 (D)3

解：a.水平渐近线 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$\therefore y=1$ 为该函数曲线的水平渐近线

b.竖直渐近线 $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2+x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x(x+1)}{(x+1)(x-1)}=\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{x-1}=\infty$

$\therefore x=1$ 为该函数曲线的竖直渐近线

c.斜渐近线 $x\to\infty$方向已有水平渐近线，就不会再有斜渐近线了

∴该函数曲线没有斜渐近线

综上，该函数曲线有 2 条渐近线，选(C)

26、设函数 f(x)在闭区间[0,1]上连续，对于[0,1]上的每一个 x，函数 f(x)的值都在(0,1)内，证明：在(0,1)内存在 α 使 f(α)=α

解：①f(α)=α

f(x)=x
0=x−f(x)
F(x)=x−f(x)

② x
[0,1]

令 x∈[0,1]

x∈[0,1]

③当 x=0 时，0＜f(x)＜1，∴F(0)=0−f(0)＜0

当 x=1 时，0＜f(x)＜1，∴F(1)=1−f(1)＞0

∴F(0)·F(1)≤0

④∵F(x)在[0,1]上连续，且 F(0)·F(1)≤0

∴题目得证

27、已知函数 f(x)在[0,1]上连续，在(0,1)内可导，且 f(0)=0，f(1)=1

证明：存在 α∈(0,1)，使得 f(α)=1−α

解：①f(α)=1−α

f(x)=1−x
0=1−x−f(x)
F(x)=1−x−f(x)

② x
[0,1]

令 x∈[0,1]

x∈[0,1]

③令 a∈[0,1]，b∈[0,1]

则 F(a)=1−a−f(a) F(b)=1−b−f(b)

令 $f(a)=f(0) \Rightarrow a=0$　　令 $f(b)=f(1) \Rightarrow b=1$

$F(0)=1-0-f(0)=1$　　$F(1)=1-1-f(1)=-1$

$\therefore F(0)\cdot F(1)=-1\le 0$

④$\because F(x)$在$[0,1]$上连续，且 $F(0)\cdot F(1)\le 0$

$\therefore$题目得证

28、设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$的间断点，结论为

(A)不存在间断点　　(B)存在间断点 $x=1$　　(C)存在间断点 $x=0$　　(D)存在间断点 $x=-1$

解：①没有 sin、cos

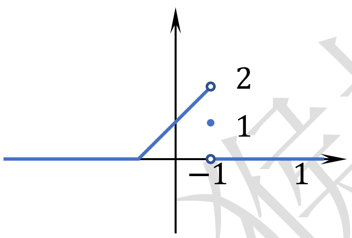
②当 $x=1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+1}{1+1^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{2}=1$

当 $x=-1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+(-1)^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-1}{1+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0}{2}=0$

当$-1<x<1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1}=1+x$

当 $x<-1$ 或 $x>1$ 时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{\infty}=0$

综上，$f(x)$是分段函数，$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le -1 \\ 1+x, & -1<x<1 \\ 1, & x=1 \\ 0, & x>1 \end{cases}$



$x=1$ 是间断点，选(B)